

MODELO TOPOGRAFICO DIGITAL DE LA ISLA DE TENERIFE

A.G. Camacho

Instituto de Astronomía y Geodesia . CSIC-UCM.

Facultad de Ciencias Matemáticas.

Universidad Complutense de Madrid.

Resumen.

Como complemento al proceso de reducción de datos gravimétricos se ha elaborado un modelo topográfico digital de la Isla de Tenerife mediante predicción mínimos cuadrados partiendo de la función covarianza de las altitudes. Detallamos aquí el proceso seguido, indicamos criterios sobre optimización del método y presentamos gráficamente dicho modelo. El modelo se ha utilizado en el cálculo de la corrección topográfica de medidas gravimétricas en la zona de la Caldera del Teide.

1. Introducción.

Para estudios y cálculos que involucren la situación de puntos en el terreno ó bien se apliquen en algún modo propiedades morfológicas del relieve, resulta muy valioso disponer de un modelo (numérico ó analítico) de la superficie topográfica. Dicho modelo permite, mediante el desarrollo de los correspondientes métodos de aplicación (programas de cálculo) utilizar de forma automatizada, precisa y rápida datos generales sobre la conformación del relieve.

En general la formación de un modelo topográfico consta de dos fases: la obtención de una adecuada cantidad de datos del relieve (digitalización) y el establecimiento de un método de interpolación/extrapolación/filtrado que nos permita obtener una superficie aproximadora para el conjunto discreto de datos anteriores.

Según la aplicación a la que el modelo topográfico se destine, este ha de reflejar con mayor o menor meticulosidad las irregularidades del relieve. Ello se obtendrá eligiendo una adecuada digitalización de la topografía y un adecuado método de interpolación.

El proceso que a continuación indicamos corresponde a la obtención de un modelo topográfico de la zona de las Cañadas del Teide (Tenerife), y por extensión para toda la isla, aplicado en principio con el fin de conocer las masas superficiales y poder estimar sus efectos gravitatorios. Los programas de cálculo que permiten la elaboración y utilización del modelo han sido expresamente desarrollados.

2. Digitalización.

Como datos mas directos del terreno estan las coordenadas de un adecuado número de puntos. (Podrian establecerse otros datos numéricos de descripción morfológica, pero su utilización sería mas dificultosa). Resulta evidentemente más sencillo el establecimiento del modelo sobre coordenadas planas (por ejemplo UTM) que sobre coordenadas curvilíneas (geodésicas).

Estas coordenadas dato pueden obtenerse por Geodesia, Topografía clasica, restitución fotogramétrica, etc. Puede acudirse tambien a un banco de datos geográficos ya existente. En nuestras circunstancias ha resultado mas adecuado proceder a la digitalización de mapas topográficos (1/50000,

1/25000 y 1/200000) de la isla de Tenerife. El método de digitalización ha de elaborarse de acuerdo con la precisión final que ha de ofrecer el modelo y con el método de interpolación que va a seguirse. En nuestro caso, la digitalización por isolinéas, con adecuado espaciamento, es el procedimiento más agíl y resulta compatible con el método de predicción mínimos cuadrados que va a usarse.

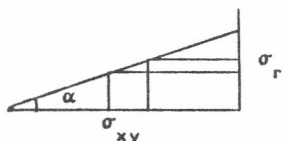
Si suponemos un mapa "correcto" en su escala, los errores serán inferiores a la apreciación visual sobre el papel. Sea $1/E$ la escala del mapa. Si fijamos en 0.2 mm el error medio cuadrático (e.m.c.) sobre el mapa. El e.m.c. a "tamaño real" será:

$$0.2 \sqrt{E} \text{ mm}$$

Si suponemos que el error de "seguimiento" de isolinéa con la plumilla de digitalización es de 0.4 mm, el error resultante en planimetría será:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{E} \sqrt{0.2^2 + 0.4^2} \text{ mm}$$

Si adoptamos las coordenadas planimétricas como correctas y enfocamos el anterior error hacia la altimetría, el error m.c. σ_r resultante en altimetría vendrá claramente determinado por el grado de inclinación o rugosidad presente en el relieve.



En la figura es:

$$\sigma_r = \sigma_{xy} \operatorname{tg} \alpha$$

Figura 1. Error segun pendiente.

El espaciamento con que han de tomarse los puntos de digitalización sobre el mapa depende directamente de la "rugosidad" del relieve, ó mejor de la del modelo a obtener. Dicha "rugosidad" viene aquí caracterizada por la función covarianza $C(d)$ de las altitudes s ("señal" del modelo) en función de las distancias d entre los puntos. Dicha función puede estimarse a partir de los datos de observación l en puntos discretos (eliminados previamente los sistematismos mediante un ajuste polinómico).

Es evidente que en el terreno podemos distinguir varios niveles de rugosidad, que corresponden a varias "longitudes de onda" (λ) y que podrían dar lugar a varios niveles de función covarianza: partículas de tierra y piedras ($\lambda \approx \text{mm}$), irregularidades de las masas pétreas ($\lambda \approx \text{m}$), formaciones locales más extensas ($\lambda \approx 100 \text{ m}$), colinas y valles ($\lambda \approx \text{km}$), cordilleras y estructuras tectónicas, etc. A cada uno de estos niveles de rugosidad corresponde una amplitud de desnivel creciente.

Según la aplicación que deba tener el modelo (señal s), este debe reflejar el relieve a partir de un cierto nivel de rugosidad, de modo que las irregularidades de orden inferior presentes en los datos geográficos discretos l pasen a tener carácter de "ruido" (r) aleatorio que ha de ser filtrado para obtener el modelo:

$$l = p + s + r$$

p es la parte sistemática, ajustable de forma polinómica en general.

Aquí r comprendería, además de las rugosidades de orden inferior, los

errores de medida ya indicados. La varianza a priori del ruido, σ_r^2 , vendrá determinada aquí por el valor máximo entre el resultante de los errores estimados en la medida de los datos geográficos y el valor correspondiente al orden del desnivel medio cuadrático presente en las rugosidades de orden inferior. De este modo la matriz covarianza del ruido incorrelado debe ser :

$$C_{rr} = \sigma_0^2 I$$

(I matriz unidad).

Las varianzas a priori σ_0^2 , σ_s^2 de los datos (eliminando la parte sistemática) y de la señal se obtienen del estudio de la función covarianza (Mussio, 1984).

3. FORMACIÓN DEL MODELO.

Debemos señalar que para utilizar como método de interpolación/filtrado el dado por las fórmulas del método general de colocación (predicción mínimos cuadrados) es necesario que los datos no contengan sistematismos. Por ello es conveniente proceder a una determinación y eliminación de efectos sistemáticos.

La forma más sencilla de proceder para eliminar los sistematismos es ajustar una función polinómica a los datos de observación (Mussio, 1987). Ajustaremos una función polinómica de grado g mediante la resolución mínimos cuadrados del sistema:

$$\left. \begin{aligned} l_i &= \sum_{k=0}^g \sum_{l=0}^g c_{kl} x_i^k y_i^l + v_i \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

en incógnitas los coeficientes c_{kl} de la función polinómica. Para cada punto $P_i(x_i, y_i)$ con observaciones l_i (altitud digitalizada) tenemos una ecuación, $i=1, \dots, m$, con un residual v_i .

En el caso de modelos topográficos la aplicación de este ajuste previo es recomendable en el caso de una elevación, una inclinación, una concavidad, una convexidad, etc. generales del terreno.

$$l = p + v$$

Los residuales v del ajuste son de media cero y varianza σ_0^2 . Sobre estos plantearemos la predicción mínimos cuadrados. Dichos residuales v_i contendrán en primer lugar una parte aleatoria, ruido r , de varianza σ_r^2 y covarianzas nulas. Este ruido estará formado por los errores de observación y por aquellas oscilaciones presentes en la observación que poseen "longitud de onda" menor que la separación entre los puntos P_i de observación. (El espaciamiento en la toma de datos determina que componentes en el fenómeno observado pasan a tener carácter de ruido y cuales no).

Los residuales v_i contendrán también una parte s , señal, aleatoria en su conjunto pero con covarianzas no nulas, que representa una oscilación registrable del campo:

$$v = s + r$$

La señal s , calculada para el área de estudio, sumada a la expresión

polinómica previa constituyen el modelo ajustado del campo.

La identificación y determinación de la señal en los datos v_i se realiza a través de la covarianza C (matriz de varianzas covarianzas) de dichas señales. Supondremos que la covarianza entre las señales en dos puntos, P, Q , es función de la distancia entre dichos puntos: las señales en puntos próximos presentan valores más afines mientras que las señales en puntos alejados no tienen relación, dando covarianza nula.

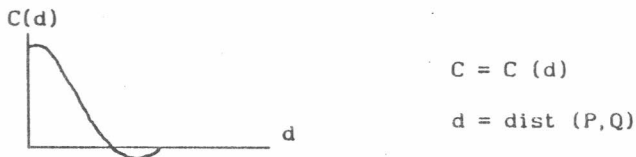


Figura 2. Función covarianza.

En general, para una "señal" s , la función covarianza C viene definida por:

$$C_{ss} = C(P, Q) = E(s(P), s(Q))$$

donde $s(P), s(Q)$ son los valores de la señal en dos puntos genéricos P y Q , y E es el operador esperanza matemática. La función C es definida positiva y en general se la supone isótropa, es decir, que sólo depende de la distancia d entre los puntos $C_{ss} = C(d)$.

Conocida la función covarianza $C(d)$, la varianza de s se establece por continuidad en la forma:

$$\sigma_s^2 = C(0)$$

La función covarianza de las señales s puede estimarse a partir de los propios datos v_i conocidos en puntos discretos. Para ello agrupamos estos v_i por pares en función de la distancia entre sus puntos. Dividimos el intervalo total de distancias en varios subintervalos (suficientemente representados). Para cada distancia d , ó mejor, subintervalo de distancias en torno a d , el valor de la función covarianza se calcula mediante (Barzagui y Sanso, 1983):

$$C(d) = \frac{1}{N_d} \sum_i \sum_j v_i v_j$$

siendo v_i, v_j datos en puntos P_i, P_j separados una distancia d más o menos el radio de los subintervalos. N_d es el número de pares para la distancia d .

Los valores de covarianza no nula deben atribuirse a la señal, mientras que los valores correspondientes a $d=0$, varianzas, serán suma de las varianzas de la señal y del ruido.

La estimación de la función covarianza para las señales se realiza ajustando una función analítica tipo a la nube de puntos antes obtenida. En Mussio (1984) se recogen los tipos de funciones más habituales.

En general:

$$\sigma_o^2 = \sigma_s^2 + \sigma_r^2 = C(0) + \sigma_r^2$$

Conocida la función covarianza $C(d)$ para la señal s , aplicando las fórmulas generales del método de colocación (Moritz, 1980) en su caso particular de predicción/filtrado sin parámetros de ajuste y con errores de

observación (ruido) tenemos:

valor estimado de la señal s en un punto P :

$$\hat{s}_P = (C_{1P} \ C_{2P} \ \dots \ C_{mP}) \begin{bmatrix} C_{11} + \sigma_r^2 & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} + \sigma_r^2 & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} + \sigma_r^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

siendo v_i los m datos (residuales) en los puntos P_i , $i=1, \dots, m$ y:

$$C_{iP} = C(s(P_i), s(P)) = C(\text{dist}(P_i, P))$$

$$C_{ij} = C(s(P_i), s(P_j)) = C(\text{dist}(P_i, P_j))$$

Si llamamos \hat{z} al vector columna de señales estimadas en puntos diferentes a los dato (predicción) para distinguirlo del vector s de señales estimadas en los propios puntos dato (filtrado), expresamos:

$$\hat{z} = C_{zs} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} v \quad \text{predicción}$$

$$\hat{s} = C_{ss} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} v \quad \text{filtrado}$$

Las matrices C son las de covarianza. Por ejemplo, $C_{rr} = \sigma_r^2 I$ matriz covarianza del ruido. v es el vector columna de datos. Estos valores \hat{s} , \hat{z} sumados a los obtenidos por el ajuste polinómico previo constituyen el modelo final. Para cada punto P , la aplicación de las fórmulas (2), junto con las (1) de ajuste polinomial permiten obtener los valores ajustados del modelo.

Podemos también calcular la precisión, en forma de matriz de varianzas-covarianzas E de estos valores \hat{s} , \hat{z} calculados por predicción mínimos cuadrados (Sevilla, 1987):

$$E_{zz}^{\hat{}} = C_{zz} - C_{zs} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} C_{sz}$$

$$E_{ss}^{\hat{}} = C_{ss} - C_{ss} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} C_{ss}$$

Los términos de la diagonal principal de $E_{zz}^{\hat{}}$ y $E_{ss}^{\hat{}}$ nos dan las varianzas de los valores calculados de la señal en cada punto. Pueden asimismo calcularse los valores estimados de las diversas magnitudes y la precisión de dichos valores.

4. Modelo topográfico de Tenerife. Conclusiones.

Siendo nuestro objetivo final la aplicación del modelo a la corrección topográfica de un levantamiento gravimétrico de la Caldera del Teide, hemos planteado tres niveles de resolución: Básicamente hemos digitalizado los mapas 1:50000 de la mayor parte de la isla con un punto cada 400 mts. Para disponer de la morfología del conjunto de la isla de Tenerife y litorales hemos digitalizado de forma complementaria y mas somera el mapa 1:200000. Finalmente hemos aumentado la resolución en el area del interior de la Caldera del Teide (zona de estudio gravimétrico) sobre mapas 1:25000 con

espaciamiento aproximado a 150 mts.

Digitalizados los mapas y efectuado un primer ajuste polinómico de grado 4 estimamos la función covarianza de las altitudes del modelo mediante la covarianza de los datos residuales v_i .

Si representamos (fig 3) las estimaciones empíricas por intervalos de las funciones covarianza para cada nivel resultan las líneas de puntos de la figura. Observamos el aspecto típico de función covarianza. Ajustamos por funciones del tipo normal-parábola:

$$C(x) = a(1 - cx^2)e^{-bx^2}$$

representadas mediante línea continua en la figura. Los coeficientes a,b,c se determinan por mínimos cuadrados a partir de unos valores iniciales obtenidos por tanteo. Así mismo se obtienen los valores de las diversas varianzas.

Copocidas las funciones covarianza $C(d)$ para las altitudes residuales de cada nivel aplicamos las fórmulas del apéndice para la obtención del modelo. La precisión resultante en los puntos del modelo es de

$$\text{e.m.c.}(50000) \approx 18 \text{ mts} \quad \text{e.m.c.}(25000) \approx 4 \text{ mts} \quad \text{e.m.c.}(200000) \approx 60 \text{ mts}$$

Las figuras 4,5 y 6 muestran en forma de vista perspectiva y de mapa de isolíneas para la zona de la Caldera del Teide la superficie polinómica aproximadora, la superficie de predicción de residuales y el modelo conjunto. Las figuras 7 y 8 muestran también en vista perspectiva y mapa de isolíneas el modelo de la Isla de Tenerife y el modelo de una zona reducida (3 x 2 km) procedente del 25000.

El presente trabajo se ha desarrollado en el Instituto de Astronomía y Geodesia dentro del proyecto de investigación "Estudio y evaluación de movimientos recientes de la Corteza por métodos microgravimétricos y de geodesia de precisión. Aplicación a zonas volcánicas en las Islas Canarias" que financia el C.S.I.C.

4. REFERENCIAS.

- Barzaghi, R., Sanso, F. "Sulla stima empirica della funzione di covarianza" Bolletino de Geodesia e Sci. Affi. n. 4. pp. 389-415. 1983
- Moritz, H. "Advanced Physical Geodesy". Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe. 1980.
- Mussio, L. "Il metodo della collocazione minimi quadrati e le sue applicazioni per l'analisi statistica dei risultati delle compensazioni". Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria. pp.305-338. Clup. Milano. 1984.
- Mussio, L. "Estrategias del método de colocación". IV Curso de Geodesia Superior. Cursos y Semin. Inst. de Astron. y Geodesia. pp.145-209. 1987
- Sevilla, M.J. "Colocación mínimos cuadrados" IV Curso de Geodesia Superior. Cursos y Semin. Inst. de Astrono. y Geodesia. pp. 99-141. 1987.

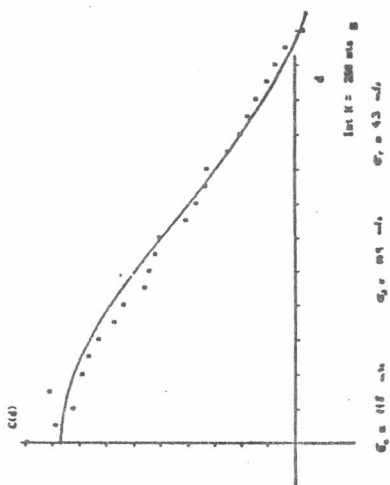
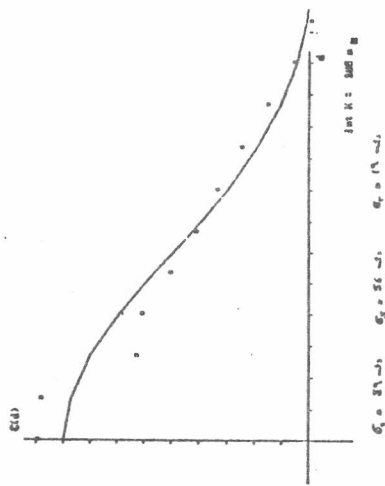
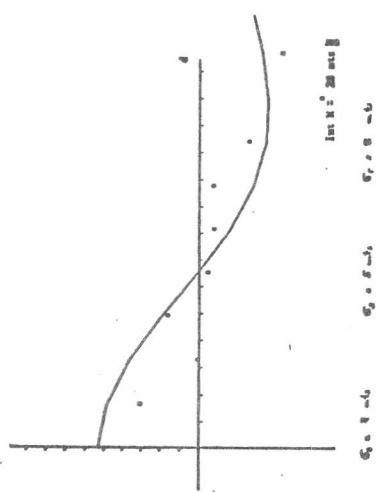
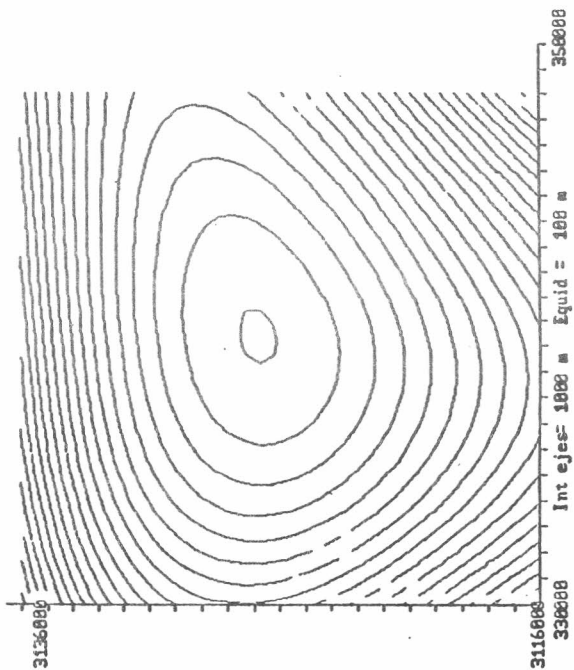
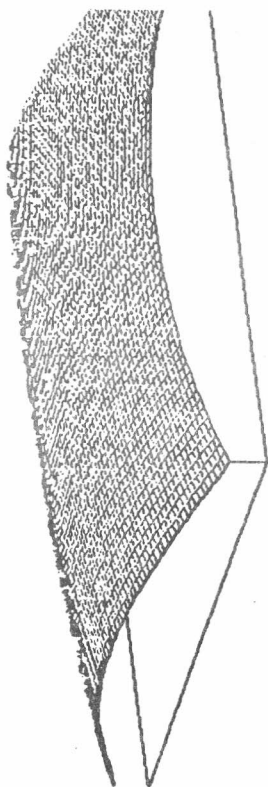


Figura 4. Aproximación polinómica.

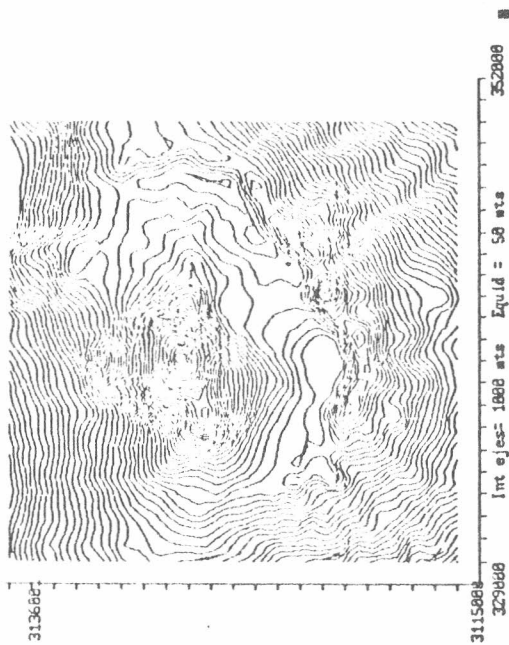
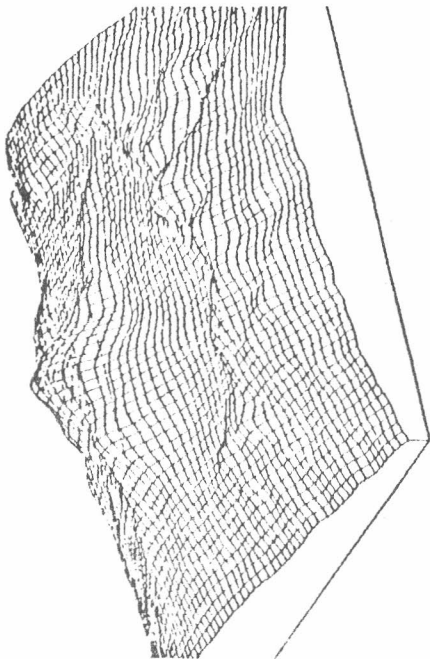


Figura 6. Modelo conjunta

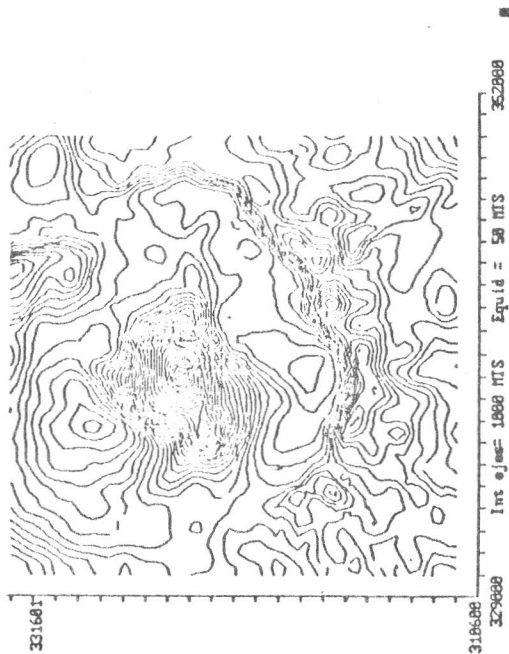
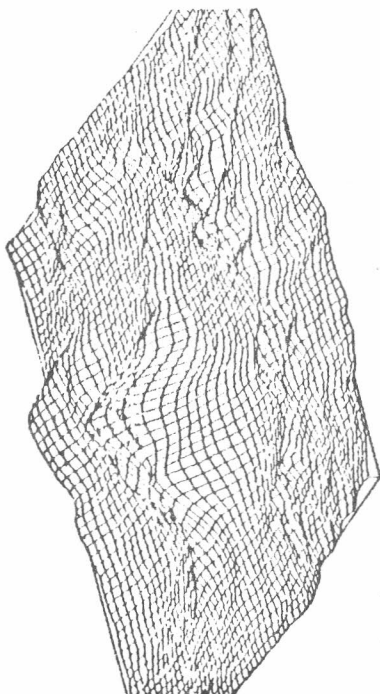


Figura 5. Predicción de residuales

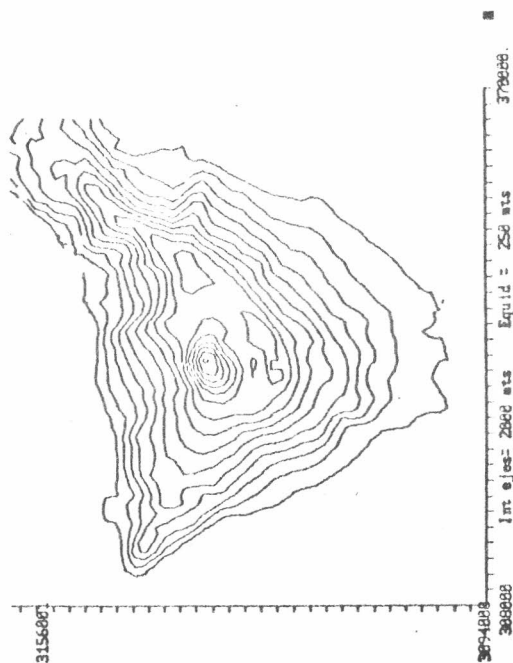
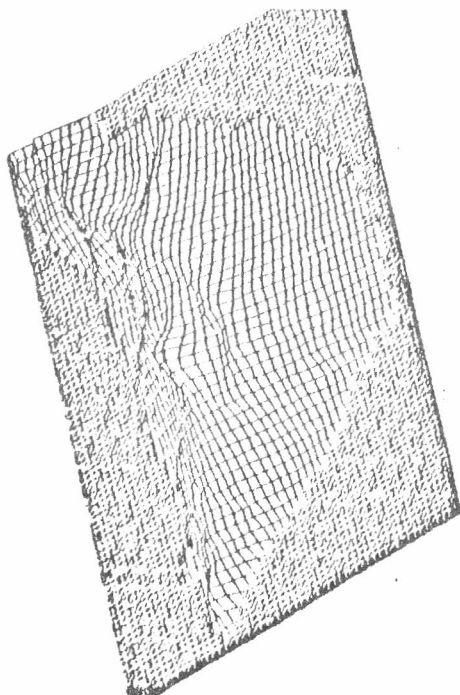


Figura 7. MODELO ISLA TENERIFE

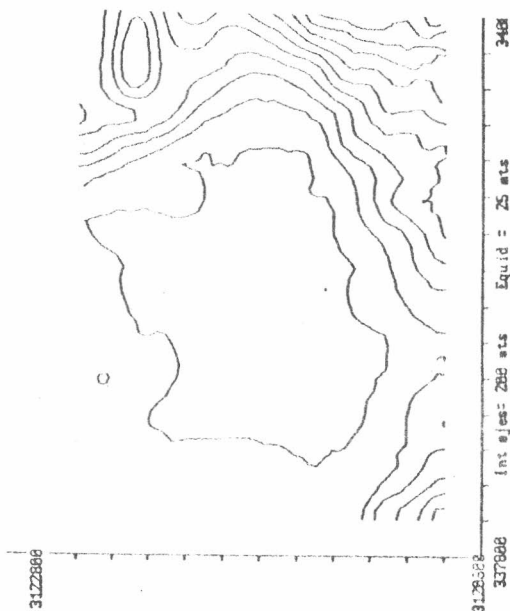
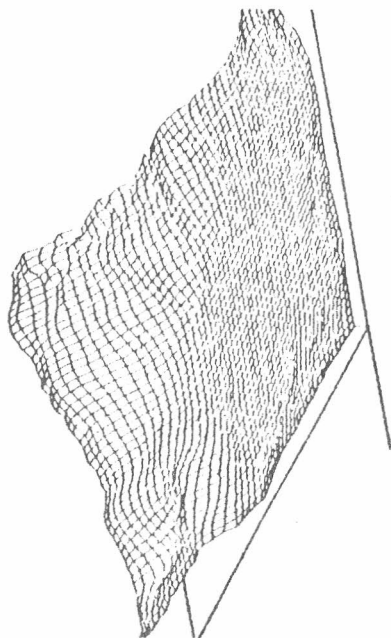


Figura 8. Modelo zona Valle de Ucanca.